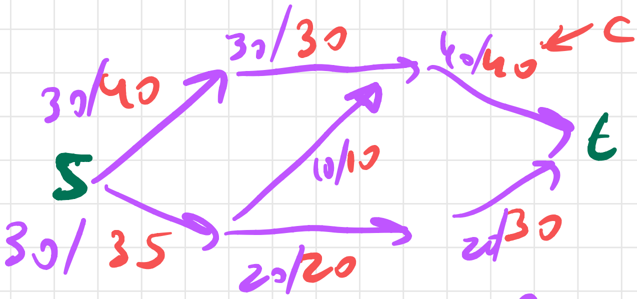
Flows



дан G.

1) $\forall v \notin \{s, t\}$: втекано = вытекано

2) $\forall e \quad 0 \leq f_e \leq c_e$

Задача поиск. макс потока

дано G, c, s, t

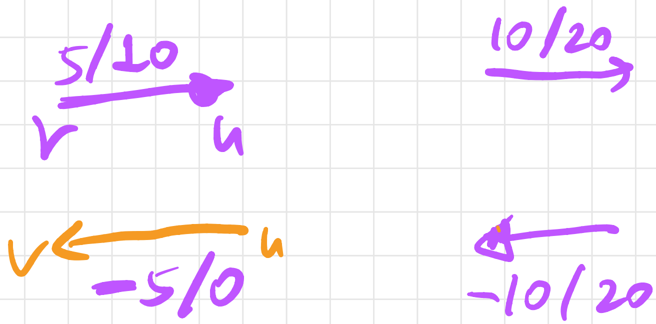
найти макс. поток

Def: Поток (1) $f: E \to \mathbb{R}_+$

1) $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \qquad \underset{\text{out}}{\sum_{e \in \delta^+(v)}} f_e = \underset{\text{IN}}{\sum_{e \in \delta^-(v)}} f_e$

2) $\forall e: 0 \leq f_e \leq c_e$

Def: Обратные рёбра.



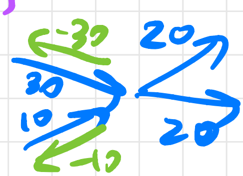
$\forall e \in E$ есть обратное ребро e'

и $f_e = -f_{e'}$

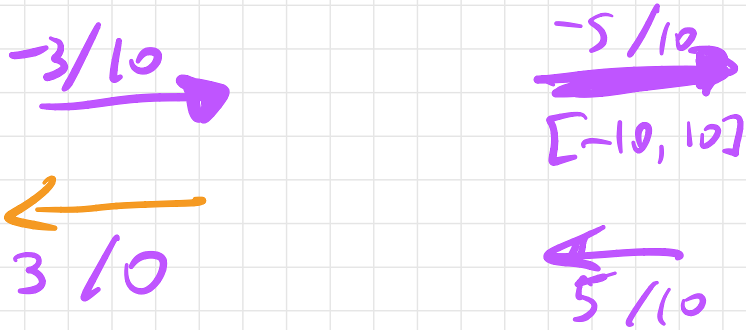
Def Поток (2) $f: E \to \mathbb{R}$

0) $\forall e \in E \quad f_e = -f_{e'}$

1) $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \quad \sum\limits_{e \in \delta^+(v)} f_e = 0$



2) $\forall e: \quad f_e \leq c_e$

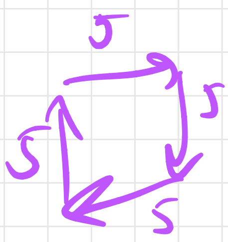


Def: Размер потока

$$|f| = \sum_{e\in\delta^+(s)} f_e \quad \left(= \sum_{e\in\delta^-(t)} f_e\right)$$

Def Циркуляция: поток размера 0.

(св-во 1 верно $\forall v$, включая s, t)



Задача поиска макс. потока

Дано G, c, s, t.

Найти f : $|f| \to \max$

$\xrightarrow{10/20}$

$\xrightarrow[]{+10}$

$s \rightsquigarrow t$

$+=$ поток

$\xrightarrow{15/20}$

$+5$

-15

$\xleftarrow[-15/0]{}$

Алгоритм Форд-Фалкерсон 1957

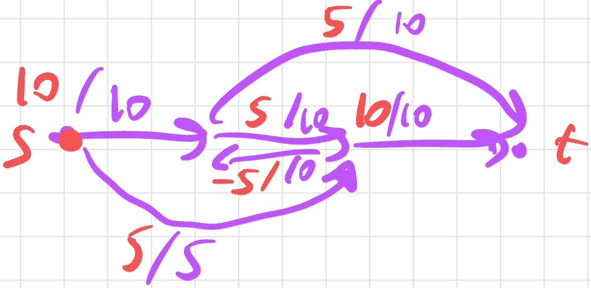
1) $f = 0$

2) while $\exists p$ - путь в ост. сети G_f

$$f \mathrel{+}= p \cdot (\min_{e \in p} c_e - f_e)$$

$G, c, f \quad \xrightarrow{15/20} \quad \xrightarrow{-10/0} \quad \xrightarrow{20/20}$

$G_f \quad \xrightarrow[5]{} \quad \xrightarrow[10]{} \quad -\!\!\times\!\!\rightarrow$

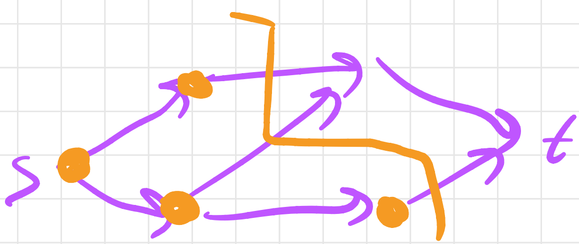


Время работы (для целых потоков)

$$O(|f| \cdot E)$$

Корректность — ?

MIN CUT



дано: $G, s, t, c : E \to \mathbb{R}_+$

найти мин разрез.

(найти $S \subseteq V$, что $c(\delta^+(S)) \to \min$

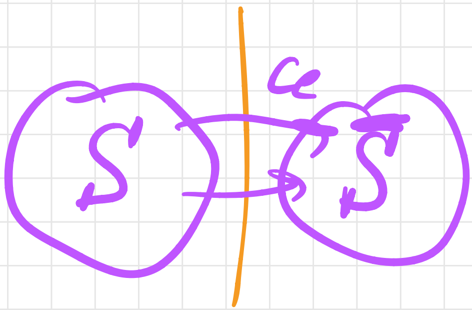
Def. s-t разрез $S \subseteq V$

$s \in S$, $t \notin S$

Def разрез $S \subseteq V$

Def: величина разреза:

$$c(\delta^+(S)) = \sum_{e \in \delta^+(S)} c_e$$



MAX-CUT

—||—, но $c(\delta^+(S)) \to \max$

(global) MAX-CUT – NPc

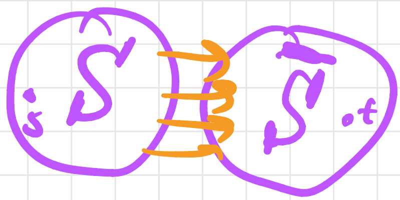
Lm 1 $\forall f$ - flow, $\forall S$ - s-t разрез

$$|f| \le c(\delta^+(S))$$

Lm 2 $\forall f$ - flow $\forall S$ - s-t разрез

$$|f| = \sum_{e\in\delta^+(S)} f_e$$

Д-во 2



$$|f| = \sum_{e\in\delta^+(s)} f_e$$

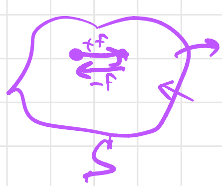
← закон сохр. потока для $S\setminus\{s\}$

$$= \sum_{v\in S}\ \sum_{e\in\delta^+(v)} f_e$$

$\forall v\in S\setminus\{s\}$

$\sum_{e\in\delta^+(v)} f_e = 0$

$$= \sum_{e\in\delta^+(S)} f_e$$



Д-во 1:

Д-ть: $|f| \le c(\delta^+(S'))$

$$|f| \underset{\text{лм1}}{=} \sum_{e \in \delta^+(S')} f_e \le \sum_{e \in \delta^+(S')} c_e = c(\delta^+(S'))$$

Ford - Fulkerson

Корректность алгоритма - ?

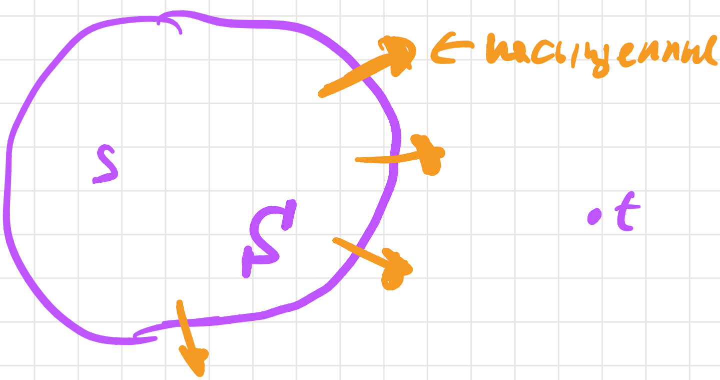
<u>Theorem:</u> f - макс. поток $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nexists$ s-t пути в G_f

<u>Д-во</u> "$\Rightarrow$" - очевидно

"$\Leftarrow$"

Пусть S' - мн-во вершин достижимых из s в G_f



по Lm2: $|f| = \sum\limits_{e\in\delta^+(S')} f_e$

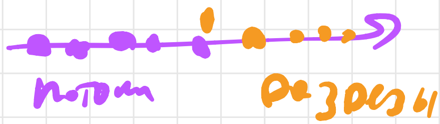
$\forall e \in \delta^+(S') \quad f_e = c_e$

(насыщенность рёбер)

$$|f| = \sum_{e\in\delta^+(S')} f_e = \sum_{e\in\delta^+(S')} c_e = c(\delta^+(S'))$$

$\Rightarrow$ у нас есть поток и разрез одного размера

$\Rightarrow$ оба опт (используя Lm 1)



$\Rightarrow$ f – макс поток $\square$

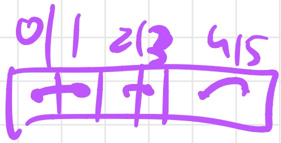
Следствие 1: Ф-Ф. работает верно

Следствие 2: зная f – макс. поток можно найти мин разрез за $O(V+E)$

Следствие 3: Если c – целая, то макс поток достигается на целых f_e

Rem: Если c - не целое, то

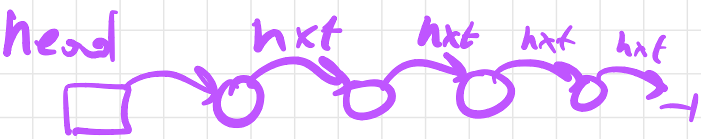
$\exists$ плохие примеры на которых Ф.Ф. работает ∞ шагов.




```python
class Edge:
    def __init__(self, to, flow, cap, nxt):
        self.to = to
        self.flow = flow
        self.cap = cap
        self.nxt = nxt

edges = []
head = [-1 for i in range(n)]

def add_edge(a, b, cap):
    edges.append(Edge(b, 0, cap, head[a]))
    head[a] = len(edges) - 1

    edges.append(Edge(a, 0, 0, head[b]))
    head[b] = len(edges) - 1
```

$a \xrightarrow{cap} b$

$a \xleftarrow{0} b$



adjacency список для v:

for (i=head[v]; i ≠ -1; i= edges[i].nxt)

print(edges[i])

```python
used = [False for i in range(n)]

def find_flow(v, max_cap):
    if used[v]:
        return 0

    if v == T:
        return max_cap

    used[v] = True

    i = head[v]
    while i != -1:
        limit = min(edges[i].cap - edges[i].flow, max_cap)

        if limit and (result := find_flow(edges[i].to, limit)):
            edges[i].flow += result
            edges[i^1].flow -= result
            return result

        i = edges[i].nxt

ans = 0
while (delta := find_flow(S, int(1e9))):
    ans += delta
    used = [False for i in range(n)]
```

$v \to edges_i$

$$v \xrightarrow[+=\text{result}]{i} \text{edges}[i].\text{to}$$

$$v \xleftarrow[-=\text{result}]{i \wedge 1} \text{edges}[i].\text{to}$$

Хочется алгоритм который

быстрее $O(|f| E)$

Edmonds Karp

$f = 0$

while $\exists\, p$ — путь в G_f

пусть p — кратчайший из таких (bfs)

$f \mathrel{+}= p \cdot \min\limits_{e \in p} c_e - f_e$

E-K работает за poly(V, E)

Обозначение $d_f(v) := dist_{G_f}(s, v)$

Lm 1 $\forall v \quad d_{G_f}(v) \nearrow$

в процессе E-K.

Д-во: от противного

Пусть $f \to f'$

и $d_f(v)$ уменьшилось

$$d_{f'}(v) < d_f(v)$$

Пусть v: $d_{f'}(v) \to \min$

Рассмотрим путь $s \to v$ в $G_{f'}$

$$s \longrightarrow u \to v,$$

$$d_{f'}(v) = d_{f'}(u) + 1$$

Св-во 1: $d_{f'}(u) \geq d_f(u)$

иначе противоречие с min

$d_{f'}(v)$.

Св-во 2: $(u, v) \in E(G_{f'})$

Св-во 3: $(u,v) \notin E(G_f)$

<u>Д-во:</u> $d_{f'}(v) = \underbrace{d_{f'}(u)}_{\geqslant d_f(u)} + 1$

пусть $(u,v) \in E(G_f)$, тогда

$$d_f(v) \leq d_f(u) + 1$$

$d \longrightarrow \leq d+1$

•) $d_f(v) \leq d_f(u)+1$

•) $d_{f'}(v) \geq d_f(u)+1$

однако мы предположили

$d_{f'}(v)$ меньше $d_f(v)$ $\square$

$(u,v) \in E(G_{f'})$, $(u,v) \notin E(G_f)$

$\Rightarrow f'$ получено из f

аугментацией по пути содержащему

(v, u)

$$s \to \dots \to v \to u \to \dots \to t$$

$$d_f(v) = d_f(u) - 1 \quad \text{св-во } 1$$

$$\le d_{f'}(u) - 1$$

$$= d_{f'}(v) - 2$$

Резюме: $d_f(v) + 2 \le d_{f'}(v)$

противоречие!

Мы предположили что

$$d_{f'}(v) < d_f(v) \qquad \square$$